Le problème comporte quatre parties qui sont, dans une large mesure, indépendantes.

On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions définies et continues sur $[0,2\pi]$.

Pour $f \in \mathcal{C}$, on pose

$$\Phi(f) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

Pour $f \in \mathcal{C}$ et $g \in \mathcal{C}$, on pose

$$\varphi(f,g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$$

I

1. Justifier l'existence de $\Phi(f)$ et $\varphi(f,g)$.

2. En considérant $\Phi(f + \lambda g)$, montrer que

$$\forall f \in \mathcal{C} \quad \forall g \in \mathcal{C} \quad |\varphi(f,g)| \leqslant \Phi(f).\Phi(g).$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité ?

3. Montrer que

$$\forall f \in \mathcal{C} \quad \forall g \in \mathcal{C} \quad \Phi(f + g) \leqslant \Phi(f) + \Phi(g).$$

4. On considère, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction, notée f_n, définie sur $[0,2\pi]$ par :

$$f_n(x) = \cos n x .$$

Calculer $\varphi(f_n,f_m)$ pour $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$.

5. En déduire que le système $\{f_n / n \in \mathbb{N}\}$ est libre dans le $\mathbb{R}$- espace vectoriel $\mathcal{C}$.

II

Soit g la fonction définie sur $[0,2\pi]$ par $g(x) = \frac{1}{1 - \cos u \cos x}$ où u est un paramètre appartenant à $]0,\pi[$.

1. Montrer que $g \in \mathcal{C}$.

2. Calculer $\Phi(g)$ en fonction de u.

3. Soit h la fonction définie sur $]0,\pi[$ par $h(x) = \left(\frac{1}{\sin x}\right)^{\frac{3}{2}}$

Etudier les variations de h et construire son graphe.

4. Etudier la convergence de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(t)\,dt$.

5. Donner un développement limité de h en $\frac{\pi}{2}$ à l'ordre 4.

6. Soit k la fonction définie sur $]0,2\pi[$ par $k(x) = \frac{1}{(1 - \cos x)^{\alpha}}$ où α est un paramètre réel strictement positif.

a) Pour quelles valeurs de α l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} (k(x))^2 dx \text{ existe-t-elle ?}$$

b) Est-ce à dire que $\Phi(k)$ existe ?

III

A tout $f \in \mathcal{C}$, on associe la fonction définie sur $[0,2\pi]$ par

$$T(f) : x \longmapsto \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt, \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } T(f)(0) = f(0).$$

1. Montrer que T est un endomorphisme du $\mathbb{R}$- espace vectoriel $\mathcal{C}$.

2. a) Montrer que pour toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}$, T(f) est dérivable sur $]0,2\pi]$.

b) T est-il surjectif ?

3. a) Trouver le noyau de T.

b) T est-il injectif ?

4. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

IV

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$. A tout f appartenant à $\mathcal{E}$, on associe la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$V(f) : x \longmapsto \frac{1}{x} \int_x^{x^2} f(t)dt, \text{ pour } x \neq 0 \text{ et } V(f)(0) = -f(0).$$

1. Montrer que si $f \in \mathcal{E}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x^2) = f(x)$, alors f est constante.

(On pourra, a étant un réel strictement positif fixé, considérer la suite $x_n = a^{\frac{1}{2^n}}$.)

2. Montrer que V est un endomorphisme du $\mathbb{R}$- espace vectoriel $\mathcal{E}$. Est-il injectif ? Est-il surjectif ?

3. Montrer que si f est dérivable à droite en 0 et que $f \in \mathcal{E}$, alors V(f) est dérivable à droite en 0.
Que vaut sa dérivée à droite en 0 ?